

Μετασχηματισμός Συντεταγμένων:

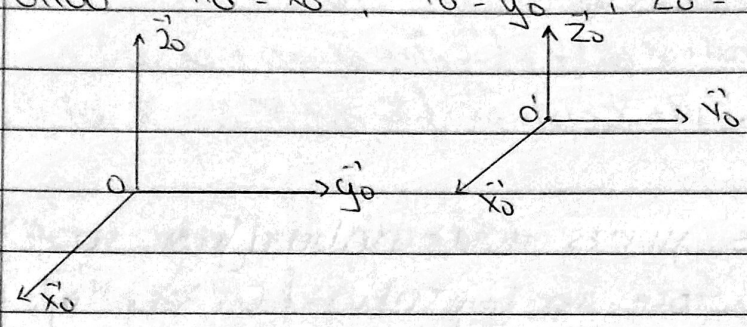
Θα εξετάσουμε μετασχηματισμούς συστημάτων συντεταγμένων.

1.) Παράλληλη Μεταφορά:

Θεωρούμε δύο συστήματα

$$\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}, \{O', x_0, y_0, z_0\}$$

$$\text{όπου } \vec{x}_0 = \vec{x}_0, \vec{y}_0 = \vec{y}_0, \vec{z}_0 = \vec{z}_0$$



Οποδή έχουμε διαφορετική αρχή, αλλά παράλληλους άξονες. Δύο τέτοια συστήματα λέγονται παράλληλα.

Ας εμβολίσουμε με (λ, μ, ν) της συντετ. ενός σημείου P ως προς το πρώτο σύστημα και με (x, y, z) τις συντεταχ. ως προς το δεύτερο σύστημα.

Ερώτημα: Πως συνδέονται μεταξύ τους οι συντεταγμένες;

Ας είναι (a, b, γ) οι συντετ. του O' ως προς το πρώτο σύστημα. Τότε

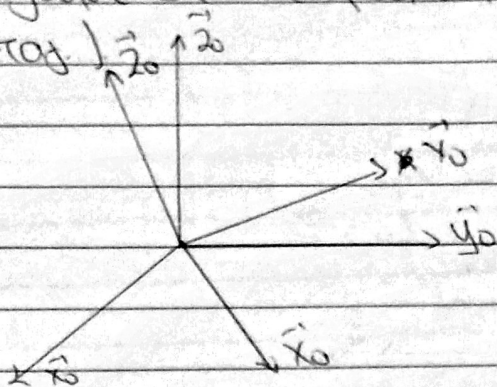
$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OO'} + \vec{O'P} \Rightarrow x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0 \\ &= a \cdot \vec{x}_0 + b \cdot \vec{y}_0 + \gamma \cdot \vec{z}_0 + x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_0, \vec{y}_0 = \vec{y}_0, \vec{z}_0 = \vec{z}_0$$

$$\begin{cases} x = a + x \\ y = b + y \\ z = \gamma + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x - a \\ y = y - b \\ z = z - \gamma \end{cases}$$

2) 2η περίπτωση:

Όταν δύο συστήματα $\{\vec{o}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ κ' $\{\vec{o}', \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ έχουν κοινή αρχή, τότε το ένα είναι στροφή του άλλου. Παρατηρούμε ότι θεωρούμε δύο δεξιόστροφα ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων.



Εάν γνωρίζουμε τις γωνίες που σχηματίζουν τα $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ με τα $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ τότε το σύστημα $\{\vec{o}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ είναι πλήρως καθορισμένο πραγματικά: Τότε

$$\vec{x}_0 = a_1 \vec{x}_0 + a_2 \vec{y}_0 + a_3 \vec{z}_0$$

$$(*) \quad \vec{y}_0 = b_1 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + b_3 \vec{z}_0$$

$$\vec{z}_0 = \gamma_1 \vec{x}_0 + \gamma_2 \vec{y}_0 + \gamma_3 \vec{z}_0$$

παράγω εσωτερικά με $\vec{x}_0$ για να βρω τα a_i .

$$(*) \Rightarrow a_1 = \langle \vec{x}_0, \vec{x}_0 \rangle = \|\vec{x}_0\| \cdot \|\vec{x}_0\| \cos \phi_1$$

$$a_2 = \langle \vec{x}_0, \vec{y}_0 \rangle = \cos \phi_2$$

$$a_3 = \langle \vec{x}_0, \vec{z}_0 \rangle = \cos \phi_3$$

Ομοίως προσδιορίζονται και οι άλλοι συντελεστές $b_1, b_2, b_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Παρατήρηση: Ο πίνακας των συντελεστών

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος, δηλαδή $A^T A = I_3$

Αυτό προκύπτει από το σύστημα (*). Άρα $A^{-1} = A^T$

Θα βρούμε πως σχετίζονται οι συντεταγμένες ενός σημείου P ως προς τα δύο συστήματα.

Ας συμβολίσουμε με (x, y, z) τις συντ. ως προς το 1° σύστημα και $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ως προς το 2° σύστημα.

Τότε

$$\vec{OP} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 \quad (**)$$

Από την άλλη

$$\vec{OP} = \bar{x}\vec{\bar{x}}_0 + \bar{y}\vec{\bar{y}}_0 + \bar{z}\vec{\bar{z}}_0 \quad (***)$$

$$\begin{aligned} & x(a_1\vec{x}_0 + a_2\vec{y}_0 + a_3\vec{z}_0) + y(b_1\vec{x}_0 + b_2\vec{y}_0 + b_3\vec{z}_0) + z(\gamma_1\vec{x}_0 + \gamma_2\vec{y}_0 + \gamma_3\vec{z}_0) \\ (***) &= (a_1x + b_1y + \gamma_1z)\vec{x}_0 + (a_2x + b_2y + \gamma_2z)\vec{y}_0 + (a_3x + b_3y + \gamma_3z)\vec{z}_0 \end{aligned}$$

Άρα από (**) & (***)

$$\begin{cases} x = a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + \gamma_1\bar{z} \\ y = a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + \gamma_2\bar{z} \\ z = a_3\bar{x} + b_3\bar{y} + \gamma_3\bar{z} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

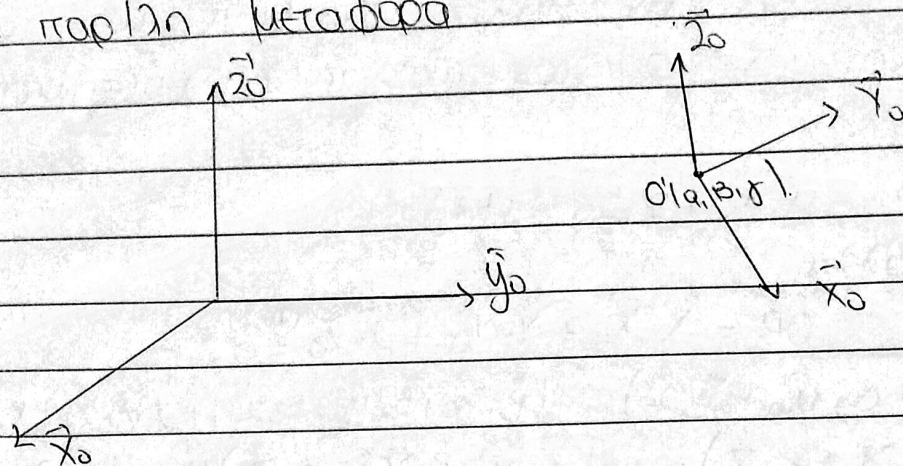
$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = a_1x + a_2y + a_3z \\ \bar{y} = b_1x + b_2y + b_3z \\ \bar{z} = \gamma_1x + \gamma_2y + \gamma_3z \end{cases}$$

Μνημονικός κανόνας:

	x	y	z
$\bar{x}$	a_1	a_2	a_3
$\bar{y}$	b_1	b_2	b_3
$\bar{z}$	γ_1	γ_2	γ_3

3) Γενική Περίπτωση:

Συνδυασμός των περιπτώσεων (1) & (2). Δηλαδή στρέψη και παράλληλη μεταφορά



Εάν $O'(a, b, \gamma)$ ως προς το 1^o συστήμα $\Rightarrow$

$$x = a + a_1 X + b_1 Y + \gamma_1 Z$$

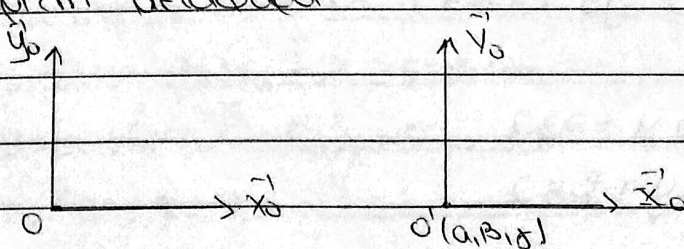
$$y = b + a_2 X + b_2 Y + \gamma_2 Z$$

$$z = \gamma + a_3 X + b_3 Y + \gamma_3 Z$$

$$\begin{cases} X = a_1(x-a) + a_2(y-b) + a_3(z-\gamma) \\ Y = b_1(x-a) + b_2(y-b) + b_3(z-\gamma) \\ Z = \gamma_1(x-a) + \gamma_2(y-b) + \gamma_3(z-\gamma) \end{cases}$$

Εφαρμογή: (6^ο επίπεδο)

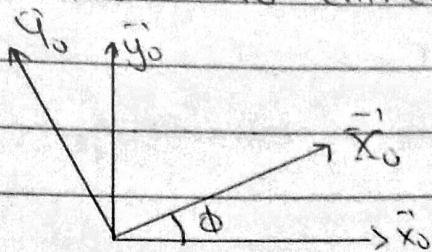
1.) παράλληλη μεταφορά



$$x = X + a \quad \Leftrightarrow \quad X = x - a$$

$$y = Y + b \quad \Leftrightarrow \quad Y = y - b$$

2.) Στροφή στο επίπεδο.



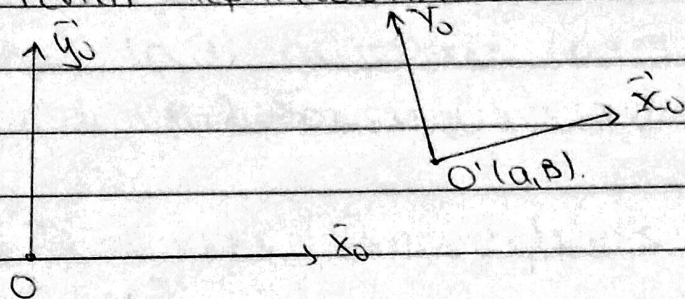
$$x = X \cos \phi - Y \sin \phi$$

$$y = X \sin \phi + Y \cos \phi$$

$$X = x \cos \phi + y \sin \phi$$

$$Y = -x \sin \phi + y \cos \phi$$

3.) Γενική περίπτωση.



$$x = a + X \cos \phi - Y \sin \phi$$

$$y = b + X \sin \phi + Y \cos \phi$$

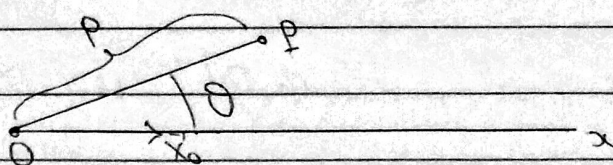
$$X = (x-a) \cos \phi + (y-b) \sin \phi$$

$$Y = -(x-a) \sin \phi + (y-b) \cos \phi$$

Ειδικές Συντεταγμένες

1.) Πολικές Συντεταγμένες

Θεωρούμε ένα σημείο O και μια ευθεία Ox από το O με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{x}_0$



Στο τυχαίο $P \in \mathbb{R}^2$.

Σελ: 6

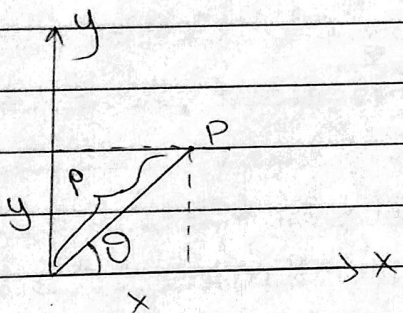
αντιστοιχούσε ένα ζεύγος (ρ, θ) όπου

$$\begin{cases} \rho = \|\vec{OP}\| \\ \theta = \text{γωνία μεταξύ } OX \text{ κ' } \vec{OP} \end{cases}$$

Η γωνία θ μετράται πάντα κατά την θετική φορά κ' $\theta \in [0, 2\pi)$
Επίσης, $\rho \in [0, \infty)$

Στην αρχή O έχουμε $\rho = 0$ κ' $\theta = \text{απροσδιορίστη}$

Το ζεύγος (ρ, θ) ονομάζεται πολικές συντεταγμένες του P
Το σημείο O λέγεται πόλος, η ημιευθεία OX λέγεται
πολικές άξονες και θ λέγεται πολική γωνία



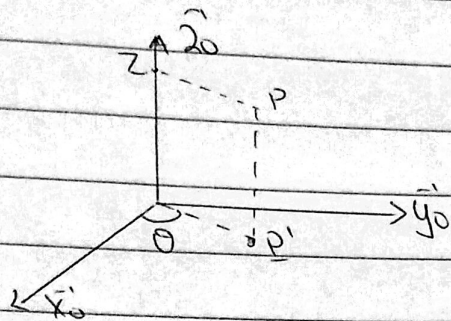
Οι πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) συνδέονται με την καρτεσιανές μέσω των εξισώσεων

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

Παράδειγμα: Σε πολικές συν. ο μοναδιαίος κύκλος με
κεντρο O έχει εξίσωση $\boxed{\rho = 1}$

2.1 Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Θεωρούμε το σύστημα $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$. Έστω



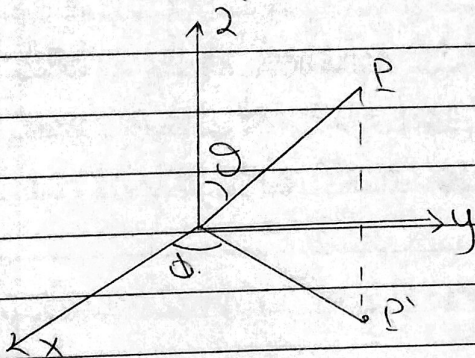
$P(x, y, z)$ τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}^3$
και P' η προβολή του P στο
 xy επίπεδο.

Τότε το P' έχει συντετ. (x, y) . Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε το P με τον εξής τρόπο

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

όπου (r, θ) οι πολικές συντετ. του P' . Η τριάδα (r, θ, z) λέγεται **κυλινδρικές συντεταγμένες**.

3.1 Σφαιρικές Συντεταγμένες:



Σε ένα σημείο $P(x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$
μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια
άλλη τριάδα αριθμών (ρ, θ, ϕ) με
όπου $\rho = \|\vec{OP}\|$, ϕ η πολική
γωνία της προέκτασης $\vec{OP}$ και θ
η γωνία του $\vec{OP}$ με το $\vec{z}_0$

$$\begin{cases} 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 \leq \theta < \pi \end{cases}$$

Τότε έχουμε :

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

Η τριάδα (ρ, ϕ, θ) λέγεται **σφαιρικές συντετ.**